

Einführung in die Logik – 5

Der Kalkül des Natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik 1. Stufe

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln
$\forall E$	$\forall B$
$\exists E$	$\exists B$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln
$\forall E$	$\forall B$ (Universelle Instantiierung)
	$\forall x A$ $A a/x$
$\exists E$	$\exists B$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS PL-1: $\forall B$

$$\frac{\forall x A}{A a/x}$$

- uniforme Substitution **A a/x** :
– Ersetzung aller Vorkommen von x in A durch a

Alle Linguisten sind klug.

Peter ist ein Linguist.

Also: Peter ist klug.

(1)	$\forall x (L(x) \rightarrow K(x))$	Prämisse
(2)	$L(p)$	Prämisse
(3)	$L(p) \rightarrow K(p)$	$\forall B, (1) p/x$
(4)	$K(p)$	$\rightarrow B, (2), (3)$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln
$\forall E$	$\forall B$ (Universelle Instantiierung)
	$\forall x A$ $A a/x$
$\exists E$ (Existentielle Generalisierung)	$\exists B$
A $\exists x A x/a$	

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS PL-1: $\exists E$

A
 $\exists x A \text{ x//a}$

- partielle Substitution $A \text{ x//a}$:
 - Ersetzung beliebig vieler Vorkommen von a in A durch x

Alle Linguisten sind klug.

Peter ist ein Linguist.

Jemand ist klug.

(1)	$\forall x (L(x) \rightarrow K(x))$	Prämisse
(2)	$L(p)$	Prämisse
(3)	$L(p) \rightarrow K(p)$	$\forall B, (1)$
(4)	$K(p)$	$\rightarrow B, (3)$
(5)	$\exists x K(x)$	$\exists E \text{ x//p}, (4)$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln
$\forall E$ (Universelle Generalisierung)	$\forall B$ (Universelle Instantiierung)
$\forall$ A $\forall x A \text{ x//v}$	$\forall x A$ $A \text{ a/x}$
$\exists E$ (Existentielle Generalisierung)	$\exists B$
A $\exists x A \text{ x//a}$	

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS PL-1: $\forall E$

v	A
$\forall x A x/v$	

$\forall E$: Für ein beliebig gewähltes v wird A abgeleitet



v



designierte Individuenkonstante für ein willkürlich gewähltes Objekt aus D , über das nichts weiter angenommen wird, als dass es Element von D ist



darf daher in keiner früheren Ableitungszeile vorkommen, von der die Konklusion abhängt ("Schrankenbedingung")

Alle Computerlinguisten sind Linguisten.

Alle Linguisten sind klug.

Also: *Alle Computerlinguisten sind klug.*

(1)	$\forall x (C(x) \rightarrow L(x))$	Prämisse
(2)	$\forall x (L(x) \rightarrow K(x))$	Prämisse
(3)	v $C(v) \rightarrow L(v)$	$\forall B v/x, (1)$
(4)	$L(v) \rightarrow K(v)$	$\forall B v/x, (2)$
(5)	$C(v) \rightarrow K(v)$	KR, (3), (4)
(6)	$\forall x (C(x) \rightarrow K(x))$	$\forall E x/v, (5)$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln														
$\forall E$ (Universelle Generalisierung)	$\forall B$ (Universelle Instantiierung)														
<table> <tr> <td>v</td><td>A</td></tr> <tr> <td colspan="2">$\forall x A x/v$</td></tr> </table>	v	A	$\forall x A x/v$		<table> <tr> <td colspan="2">$\forall x A$</td></tr> <tr> <td colspan="2">$A a/x$</td></tr> </table>	$\forall x A$		$A a/x$							
v	A														
$\forall x A x/v$															
$\forall x A$															
$A a/x$															
$\exists E$ (Existentielle Generalisierung)	$\exists B$ (Existentielle Instantiierung)														
<table> <tr> <td colspan="2">A</td></tr> <tr> <td colspan="2">$\exists x A x/a$</td></tr> </table>	A		$\exists x A x/a$		<table> <tr> <td colspan="2">$\exists x A$</td></tr> <tr> <td>w</td><td>$A w/x$</td></tr> <tr> <td></td><td>$\dots$</td></tr> <tr> <td></td><td>B</td></tr> <tr> <td colspan="2">B</td></tr> </table>	$\exists x A$		w	$A w/x$		$\dots$		B	B	
A															
$\exists x A x/a$															
$\exists x A$															
w	$A w/x$														
	$\dots$														
	B														
B															

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS PL-1: $\exists B$

$\exists x A$	
w	A w/x
	...
	B
B	

$\exists B$: Aus einer Existenzaussage wird für ein willkürlich gewähltes w eine Aussage B abgeleitet.



- w ➤ designierte Individuenkonstante für ein willkürlich ausgewähltes Objekt aus D, das die Prädikate in A erfüllt (NB: wenn $\exists x A$ wahr sein soll, muss es auch mindestens ein Objekt geben, auf das die Prädikate in A zutreffen)
- darf - außer in der typischen Instantiierung (A w/x) - in keiner Ableitungszeile vorkommen, von der die Konklusion abhängt ("Schränkenbedingung")
- darf in dem in der Unterableitung erschlossenen B nicht mehr vorkommen.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS PL-1: $\exists B$

Beispiel 1: $\vdash \exists x (F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$

(1)	$\exists x (F(x) \wedge G(x))$	Prämisse
(2)	w	H-Präm. f. $\exists B$ aus (1), w/x
(3)		F(w)
(4)		G(w)
(5)		$\exists x F(x)$
(6)		$\exists x G(x)$
(7)		$\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$
(8)	$\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$	Abschluss $\exists B$, (2), (7)
(9)	$\exists x (F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$	$\rightarrow E$ (1), (8)

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS PL-1: $\exists B$

Beispiel 2:

Einige Pilze sind giftig.

(= Einige Pilze sind giftige Dinge.)

Alles Giftige ist schädlich.

(= Alle giftigen Dinge sind schädlich.)

Also: Einige Pilze sind schädlich.

(1)	$\exists x (P(x) \wedge G(x))$	Prämisse
(2)	$\forall x (G(x) \rightarrow S(x))$	Prämisse
(3)	$w \quad P(w) \wedge G(w)$	H-Präm. f. $\exists B$ aus (1), w/x
(4)	$G(w) \rightarrow S(w)$	$\forall B$ w/x, (2)
(5)	$G(w)$	$\wedge B$, (3)
(6)	$S(w)$	$\rightarrow B$, (5), (4)
(7)	$P(w)$	$\wedge B$, (3)
(8)	$P(w) \wedge S(w)$	$\wedge E$, (7), (6)
(9)	$\exists x (P(x) \wedge S(x))$	$\exists E$ x/w, (8)
(10)	$\exists x (P(x) \wedge S(x))$	Abschluss $\exists B$, (3), (9)

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Vorsicht bei der Anwendung von $\forall E$ und $\exists B$: Verletzung der Schrankenbedingung für $\exists B$ führt zu unkorrekten Schlüssen!

Einige Katzen sind gefährlich.

Einige Hunde sind gefährlich.

*Also: Einige Katzen sind Hunde.

(1)	$\exists x (K(x) \wedge G(x))$	Prämisse
(2)	$\exists x (H(x) \wedge G(x))$	Prämisse
(3)	$w \quad K(w) \wedge G(w)$	H-Präm. f. $\exists B$ aus (1), w/x
* (4)	$w \quad H(w) \wedge G(w)$	*falscher $\exists B$ d. Wh. w!
* (5)	$K(w)$	* $\wedge B$, (3)
* (6)	$H(w)$	* $\wedge B$, (4)
* (7)	$K(w) \wedge H(w)$	* $\wedge E$, (5), (6)
* (8)	$\exists x (K(x) \wedge H(x))$	* $\exists E$, (7)
* (9)	$\exists x (K(x) \wedge H(x))$	*Abschluss $\exists B$ (4), (8)
* (10)	$\exists x (K(x) \wedge H(x))$	*Abschluss $\exists B$ (3), (9)



* - unzulässiger Schritt

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Vorsicht bei der Anwendung von $\forall E$ und $\exists B$: Verletzung der Schrankenbedingung für $\exists B$ führt zu unkorrekten Schlüssen!

Einige Katzen sind gefährlich.

Einige Hunde sind gefährlich.

*Also: Einige Katzen sind Hunde.

(1)	$\exists x (K(x) \wedge G(x))$	Prämisse
(2)	$\exists x (H(x) \wedge G(x))$	Prämisse
(3)	w $K(w) \wedge G(w)$	H-Präm. f. $\exists B$ aus (1), w/x
(4)	$w1$ $H(w1) \wedge G(w1)$	H-Pr. f. $\exists B$, (2), $w1/x$
(5)	$K(w)$	$\wedge B$, (3)
(6)	$H(w1)$	$\wedge B$, (4)
(7)	$K(w) \wedge H(w1)$	$\wedge E$, (5), (6)

keine $\exists E$ aus (7) möglich !

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Vorsicht bei der Anwendung von $\forall E$ und $\exists B$: Verletzung der Schrankenbedingung für $\exists B$ führt zu unkorrekten Schlüssen!

➤ Die designierten Variablen $v, v1, v2, \dots$ und $w, w1, w2, \dots$ müssen strikt getrennt verwendet werden:

- $v, v1, v2, \dots$ nur für $\forall E$
- $w, w1, w2, \dots$ nur für $\exists B$



v : designierte Individuenkonstante für willkürlich gewählte Objekte aus D (ohne jegliche Einschränkung)

w : designierte Individuenkonstante für willkürlich ausgewähltes Objekt aus D , von dem angenommen wird, dass es die Prädikate in A erfüllt

$F(w)$ kann nicht als Basis für die Anwendung von $\forall E$ [d.h. für die Ableitung von $\forall x F(x)$] dienen, weil w nicht für ein völlig willkürlich ausgewähltes Objekt aus D steht, sondern nur für solche Objekte, auf die F zutrifft, falls $\exists x F(x)$ wahr ist.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS für PL-1: die Schlussregeln in der Übersicht

Einführungsregeln	Beseitigungsregeln
$\forall E$ (Universelle Generalisierung)	$\forall B$ (Universelle Instantiierung)
$\frac{v \quad A}{\forall x A \ x/v}$	$\frac{\forall x A}{A \ a/x}$
$\exists E$ (Existentielle Generalisierung)	$\exists B$ (Existentielle Instantiierung)
$\frac{A}{\exists x A \ x/a}$	$\frac{\exists x A \quad \begin{array}{c} w \quad \begin{array}{c} A \ w/x \\ \dots \\ B \end{array} \\ B \end{array}}{B}$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Literatur zum Kalkül des natürlichen Schließens

- Partee, Barbara H.; ter Meulen, Alice; Wall, Robert E. (1990): *Mathematical Models in Linguistics*. Dordrecht: Kluwer.
 - darin: §6.5 *Statement Logic / Natural Deduction* und §7.4 *Predicate Logic / Natural Deduction*
- Gamut, L.T.F. (1991): *Logic, Language, and Meaning*. Vol. 1: *Introduction to Logic*. Chicago: Chicago University Press.
 - darin: §.4.3 *Arguments and Inferences / Natural Deduction: A Syntactic Approach to Inference*

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg